**Изопериметрические задачи (ИЗ)**

Изопериметрической задачей (с закрепленными концами) в классическом вариационном исчислении называется следующая задача в пространстве :

;

 – *изопериметрические ограничения*

*типа-равенства*;

 – *закрепленные концы* (*краевые условия*).

Функции  называются *интегрантами*.

Функции , удовлетворяющие изопериметрическим ограничениям и условиям на концах, называются *допустимыми*.

**Теорема** (необходимые условия экстремума).

Пусть функция  доставляет локальный экстремум в изопериметрической задаче. При этом, пусть функции  непрерывны в некоторой окрестности множества  (*условия гладкости*).

Тогда найдутся множители Лагранжа , не все равные нулю и такие, что для "лагранжиана" , справедливо ,

и выполнено уравнение Эйлера .

**Пример.**



 – изопериметрическое условие.

 – краевые условия (закрепленные концы).

*Решение*:

Лагранжиан:  

Необходимое условие – условие Эйлера: .

Если *λ*0 = 0, то *λ*1 = 0 ⇒ все множители Лагранжа – нули. В этом случае допустимых экстремалей нет.

Положим ⇒ общее решение: .

Неизвестные константы *с*1­, *с*2, *с*3 находятся из условий на концах и изопериметрических условий:

*x*(0)=0 ⇒ *c*3 =0

*x*(1)=1 ⇒ *c*1 +*c*2 =1



В задаче имеется единственная допустимая экстремаль .

Докажем с помощью непосредственной проверки, что функция  доставляет абсолютный минимум в задаче.

Возьмем функцию, такую, что:  – допустимая.

Для этого надо взять функцию *h*(⋅), для которой *h*(0)=*h*(1)=0 и .

Тогда для функционала  имеем

.

Интегрируя по частям с учетом условий на *h*(⋅), получим

, *ч.т.д.*

**Задачи со старшими производными**

**Уравнение Эйлера-Пуассона**

Задачей со старшими производными (с закрепленными концами) в классическом вариационном исчислении называется следующая задача в пространстве :



 – краевые условия.

Здесь *интегрант*  – функция (*n* + 2) переменных.

Функции, *удовлетворяющие краевым условиям*, называются *допустимыми*.

Локальный минимум задачи определяется для допустимых функций по норме .

**Теорема.**

Пусть функция *x̂*(⋅) доставляет локальный минимум в задаче со старшими производными. Пусть интегрант *F* удовлетворяет условию гладкости:

.

Тогда на экстремали *x̂*(⋅) выполняется уравнение Эйлера-Пуассона:



**Пример.**



*Решение*

Интегрант: . Необходимое условие –уравнение Эйлера-Пуассона:

.

Общее решение:;

Неизвестные константы определяем из краевых условий:



⇒ имеется единственная допустимая экстремаль .

Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче.

Действительно, если , то .

Рассмотрим первое слагаемое

.



Итак,

, *ч.т.д.*